

Résolution de problèmes – Cycles 2 et 3

Les types de problèmes et leur schématisation

Lors de nos différentes réunions, nous vous avons proposé de travailler la résolution des différents types de problèmes en nous appuyant sur la classification de Vergnaud. Nous avons axé notre réflexion sur la schématisation en lien avec une activité langagière destinée à aider à la représentation mentale et à faire du schéma un réel outil d'aide à la résolution pour l'élève.

Didactique et pédagogie

Dans le passage à l'abstraction, la manipulation d'objets réels est nécessaire, il est donc important de donner l'occasion aux élèves d'aborder la résolution de problèmes par la manipulation d'objets. Mais aussi que les enseignants puissent jouer les situations des énoncés devant leur classe à l'aide d'ardoises, de boîtes, de cubes...

Notre objectif est d'outiller l'élève dans la résolution de problèmes. Après un premier temps de reformulation orale pour permettre aux élèves de construire une représentation mentale de l'énoncé, nous essayons de mesurer à quelles conditions la schématisation peut constituer un levier pour modéliser. Pour cela, les schémas présentent une même logique qui doit permettre à l'élève de structurer facilement sa représentation et sa procédure de résolution. Ils ne sont pas donnés aux élèves en première intention. Ils doivent être construits avec eux, à partir du matériel de la classe.

A ce jour, ce document présente les problèmes qui peuvent être schématisés à l'aide de schémas en bâtons. Ils représentent la très grande majorité des problèmes traités à l'école élémentaire. Dans un second temps, d'autres problèmes seront ajoutés à ce document car certains doivent être schématisés autrement et certains ne peuvent pas être schématisés par les élèves (soit parce que la schématisation n'est pas adaptée à un élève de primaire, soit parce qu'elle ne constitue pas une aide à la résolution du problème).

Concernant le choix des problèmes, leur progression :

Pour engager vos élèves dans la schématisation, nous vous conseillons de partir de problèmes naïfs (au sens d'Emmanuel Sander), c'est à dire des problèmes que les élèves sont en mesure de rencontrer et de résoudre dans leur quotidien. Si le contexte du problème n'est pas connu, familier, il doit être préalablement explicité au cours de la reformulation.

De même, lors de la découverte d'un nouveau type de problème, il est nécessaire de proposer des énoncés mettant en œuvre des petites quantités afin de faciliter la représentation mentale et la validation des résultats. La taille des nombres est une variable didactique qui permet de placer l'élève dans une situation d'abstraction. Il est important de placer les élèves face à ce travail d'abstraction mais il faut laisser le temps de la représentation pour assurer une bonne compréhension.

L'ordre dans lequel sont amenés les problèmes constitue une proposition de progression. Elle est pensée de façon spiralaire sur l'ensemble du cursus élémentaire. Néanmoins, les problèmes à étapes, placés en fin de document, ne sont pas à étudier en dernier lieu, mais sont travaillés tout au long de l'école élémentaire.

Problèmes de type additif

Combinaison, transformation et comparaison

Nous vous proposons d'aborder les problèmes de combinaison en premier, et d'introduire progressivement des problèmes de transformation, puis de comparaison, sans pour autant que le précédent type soit parfaitement construit. Les différents types de problèmes se comprennent bien les uns en relation aux autres, il est donc nécessaire de confronter les élèves à différents types de problèmes simultanément.

Il est important que les élèves travaillent les problèmes selon différentes modalités :

- Je pars d'un énoncé, je trouve le schéma et je résous le problème.
- Je travaille avec du matériel que j'associe à un énoncé ou/et à un schéma.
- Je choisis parmi les 3 schémas affichés au tableau, celui qui va permettre de résoudre le problème que l'on vient de me lire ; je justifie mon choix dans la mise en commun.
- J'invente un énoncé qui correspond à l'un des trois schémas.
- ...

Concernant l'activité de l'élève :

Après un temps de reformulation collectif du problème, l'élève doit pouvoir se représenter mentalement le problème. (Au besoin, il peut s'aider de matériel, d'une représentation figurée, ...).

Une procédure en 3 étapes :

1. Une fois le travail de représentation mentale ou figurée effectué, l'élève peut reconnaître le type de problème qui se présente à lui.
« Dans le problème, combien de types d'objets sont en jeu ? »
 - S'il n'y en a qu'**un**, c'est un problème de **transformation**. Le problème transforme la quantité en retirant ou en ajoutant des éléments.
Exemple : « J'ai 7 billes, j'en avais 4 avant la récréation. Combien est-ce que j'en ai gagné ? »
 - S'il y en a **deux**, c'est un problème de combinaison ou de comparaison.
 - Dans une situation de **combinaison**, on associe deux éléments dans un tout.
Exemple : « J'ai des billes vertes et des billes rouges. J'ai 4 billes vertes. Combien est-ce que j'ai de billes rouges ? »
 - Dans une situation de **comparaison**, on peut s'appuyer sur les mots inducteurs : « de plus que », « de moins que » ...).
Exemple : « J'ai 9 billes. Mon frère en a 4 de moins que moi. Combien a-t-il de billes ? ».
2. Ensuite, dans les problèmes de transformation et de comparaison, l'élève doit répondre à cette question :
« Est-ce qu'il y en avait plus avant ou après l'action ? » ou encore **« Est-ce que mon frère en a plus ou est-ce que c'est moi ? »**.
3. Enfin, il doit identifier ce qu'il cherche, ce qui lui permet de placer l'inconnue dans le schéma choisi.
« Est-ce que je cherche l'état final ? Le tout ? L'écart ? ... ». Il peut alors placer les autres données.

Comme nous l'avons vu ensemble, ceci permet de finaliser le schéma et de trouver l'opération correspondante sans risque de confusion liée au lexique. Le schéma est un outil qui permet de structurer la réflexion qui mène à la modélisation et à la résolution du problème.

Dans la suite du document, nous vous proposons chacun des schémas accompagnés par des exemples pour chaque niveau des cycles 2 et 3.

Les schémas

Dans chaque schéma, l'inconnue doit être ajoutée dans le schéma sous la forme d'un point d'interrogation.

Problèmes de combinaison d'état.

Tout	
Partie 1	Partie 2

Recherche d'un des deux états.

. Une famille de 4 personnes est partie 7 jours au ski. Le forfait familial pour la semaine coûte 750 euros. La famille a loué du matériel (surfs et chaussures). En tout, elle dépense 1150 euros. Combien lui a coûté la location du matériel ?

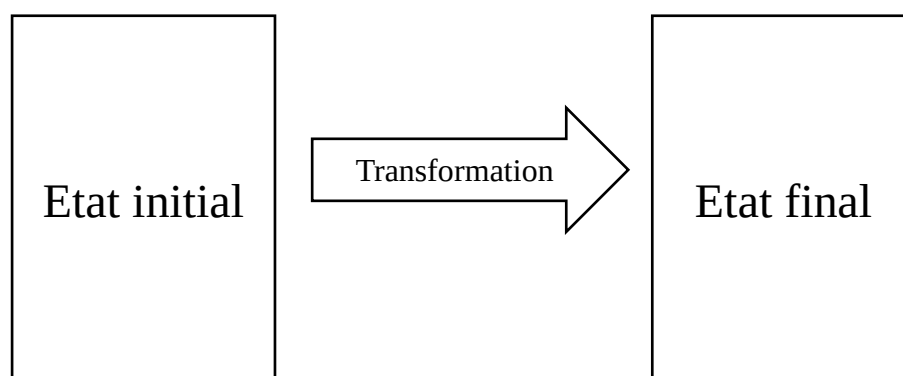
Tout	
Partie 1	?

Recherche du tout.

. Je suis parti de Besançon à 7 h 45. J'ai parcouru 250 kilomètres avant de faire une pause près de la ville d'Auxerre. Il était alors 10 h 10 min. J'ai ensuite repris la route. Je suis arrivé à Paris à 12 h 15 en parcourant 169 kilomètres supplémentaires. Quelle distance sépare Paris de Besançon ?

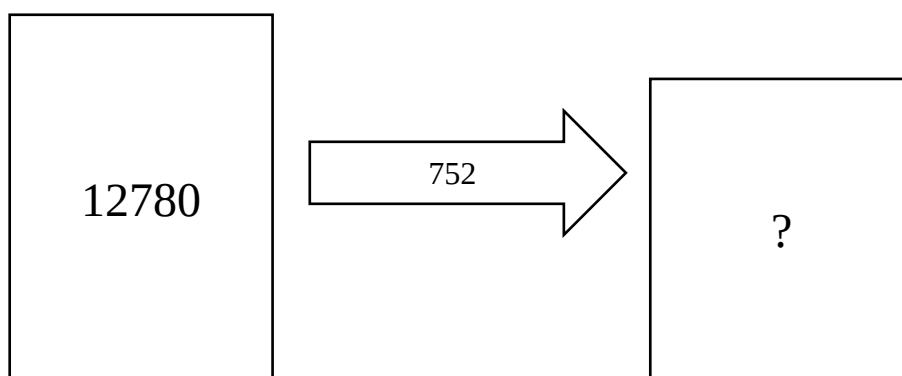
?	
250	169

Problèmes de transformation d'état.



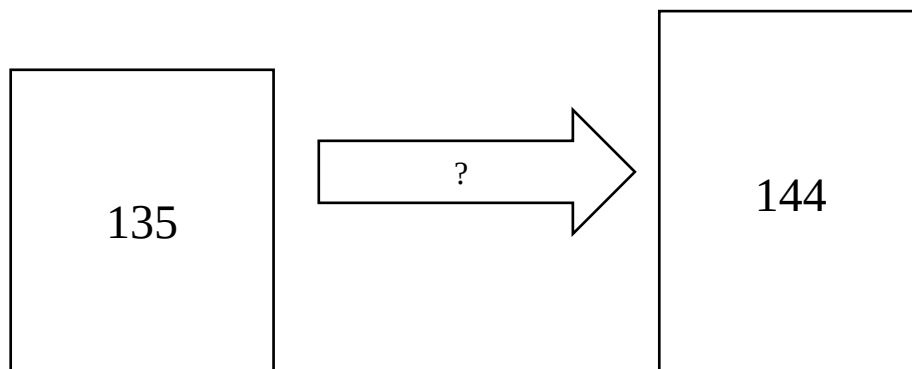
Recherche de l'état final.

. A la bibliothèque municipale, il y avait 12780 livres. La bibliothécaire supprime 752 livres anciens ou abîmés. Combien en reste-t-il après cette suppression ?



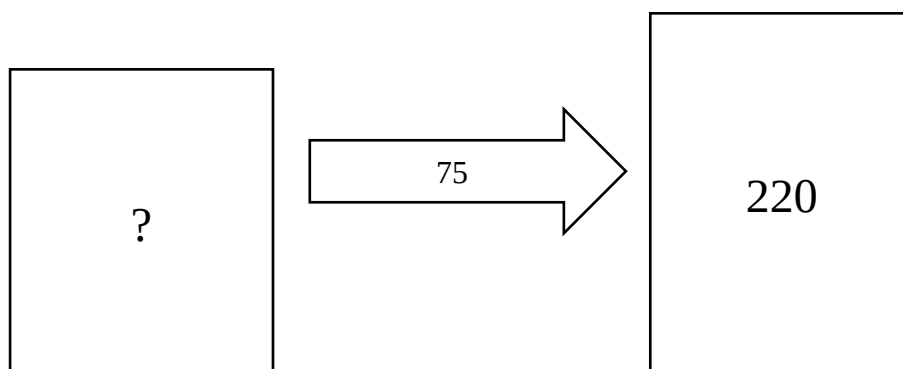
Recherche de la transformation.

. En début de CM2 Julie mesurait 135 cm. A la fin de l'année, elle mesure 144 cm. De combien de centimètres a-t-elle grandi ?



Recherche de l'état initial.

. Virgil a gagné 75 euros en jouant au loto. Il a maintenant 220 euros dans sa tirelire. Combien d'argent avait-il avant de gagner au loto ?



Pour introduire les problèmes de transformation d'état, on pourra proposer plusieurs énoncés avec combinaison d'état et un de transformation. On recherche les informations que l'on trouve dans ce type de problème et qu'on n'a pas dans l'autre : la chronologie, l'action qui se déroule.

Le confronter aux schémas déjà connus, présenter le nouveau.

Problèmes de comparaison d'état.

Pour introduire les problèmes de comparaison d'état, on pourra proposer un énoncé mettant en jeu la comparaison de la hauteur de 2 tours de cubes ou de la taille de deux élèves.

Etat 2	Ecart
	Etat 1

Recherche de l'écart.

. En 2015, la ville de Saône compte 3326 habitants tandis que 5474 personnes vivent à Valdahon. Combien y en a-t-il de plus à Valdahon qu'à Saône ?

5474	?
	3326

Recherche d'un état.

. Aline est arrivée 59^{ème} au cross du collège. Elle a terminé 8 places devant Adrien. A quelle place Adrien est-il arrivé ?

59	8
	?

Problèmes de combinaison de plusieurs états.

?			
Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4

Recherche du tout.

. Dans mon club de hand-ball, il y a 29 enfants de 6 à 7 ans, 26 enfants de 8 à 9 ans, 31 enfants de 10 à 11 ans et 37 enfants de 12 à 13 ans. Combien d'enfants sont licenciés dans l'ensemble de ces 4 catégories ?

Problèmes de type multiplicatif

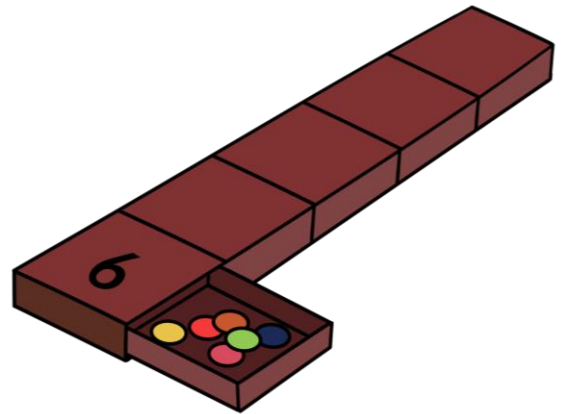
(multiplicatif, de partage, de comparaison multiplicative)

Les problèmes de type multiplicatifs sont abordés avec les situations les plus simples. On s'appuie sur des cas où on cherche le tout. L'élève devra avoir déjà rencontré des problèmes de combinaison (à 2 et à plusieurs états).

Une fois encore, le matériel est indispensable pour permettre à l'élève de construire le schéma le sens ainsi que l'opération rattachée (en cycle 2 comme en cycle 3). Les premières situations s'appuient donc sur des quantités réduites pour permettre la mise en œuvre du matériel et une représentation mentale aisée.

Par exemple :

On s'appuie sur des boîtes d'allumettes (comme dans la situation « Mathernelle – Double et moitié »). On présente plusieurs boîtes d'allumettes accolées en expliquant que chaque boîte contient le même nombre de jetons. On place à distance une grande quantité de bouchons et on demande aux élèves d'aller chercher autant de bouchons que de jetons dans l'ensemble des boîtes. Avant de partir l'élève n'a le droit d'ouvrir qu'une seule des boîtes. A son retour avec les bouchons, il valide (par dénombrement, correspondance terme à terme, ...) en sortant l'ensemble des jetons contenus dans les boîtes. Ce faisant, l'élève anticipe le résultat en se représentant mentalement la collection correspondant à n fois la collection de départ et construit ainsi le principe multiplicatif. Le schéma multiplicatif découle directement de cette situation (dans sa forme et dans son sens) et il devient donc un outil pour l'élève.



Une procédure en 3 étapes :

1. Une fois le travail de représentation mentale ou figurée effectué, l'élève peut reconnaître le type de problème qui se présente à lui.
« **Dans le problème, Est-ce qu'on répète la même quantité d'un même objet ?** »
 - Si ce n'est pas le cas, on se tourne vers un problème de type **additif**.
 - Si c'est bien le cas, c'est un problème multiplicatif.
 - Dans une situation **multiplicative ou de partage**, on combine les éléments identiques pour former un tout. Selon qu'on cherche, par exemple, le nombre de paquets, la quantité d'objets dans chaque paquet ou la quantité totale d'objets, on aborde les différentes situations relatives à ce type de problèmes.
Exemple : « J'ai acheté 6 paquets de billes vertes. Chaque paquet contient 4 billes. Combien est-ce que j'ai de billes ? »
 - Dans une situation de **comparaison multiplicative**, on peut s'appuyer sur les mots inducteurs : « fois plus que », « fois moins que » ...).
Exemple : « J'ai 9 billes. Ma sœur en a 4 fois plus que moi. Combien a-t-elle de billes ? ».
2. Ensuite, dans les problèmes de transformation et de comparaison, l'élève doit répondre à cette question : « **Est-ce qu'il y en avait plus avant ou après l'action ?** » ou encore « **Est-ce que mon frère en a plus ou est-ce que c'est moi ?** ».
3. Enfin, il doit identifier ce qu'il cherche, ce qui lui permet de placer l'inconnue dans le schéma choisi. « **Est-ce que je cherche l'état final ? Le tout ? L'écart ? ...** ». Il peut alors placer les autres données.

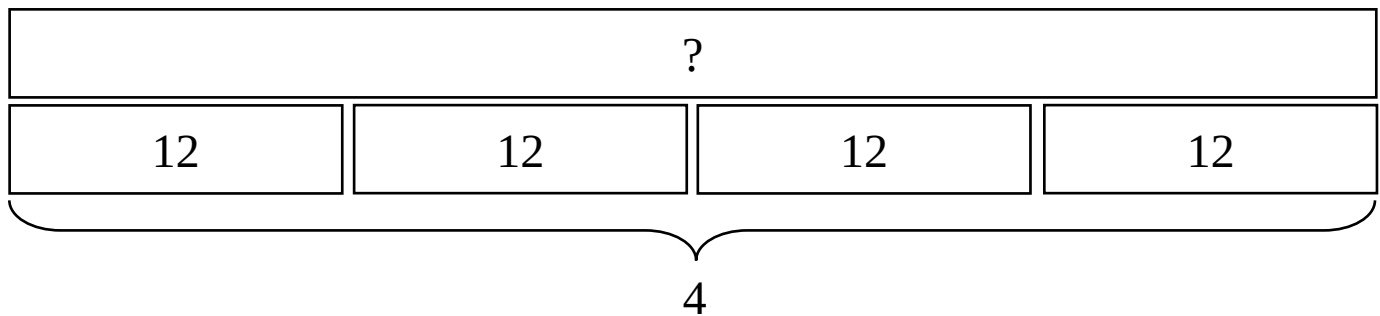
Comme nous l'avons vu ensemble, ceci permet de finaliser le schéma et de trouver l'opération correspondante sans risque de confusion liée au lexique. Le schéma est un outil qui permet de structurer la réflexion qui mène à la modélisation et à la résolution du problème.

Dans la suite du document, nous vous proposons chacun des schémas accompagnés par des exemples pour chaque niveau des cycles 2 et 3.

Problèmes multiplicatifs et de partage.

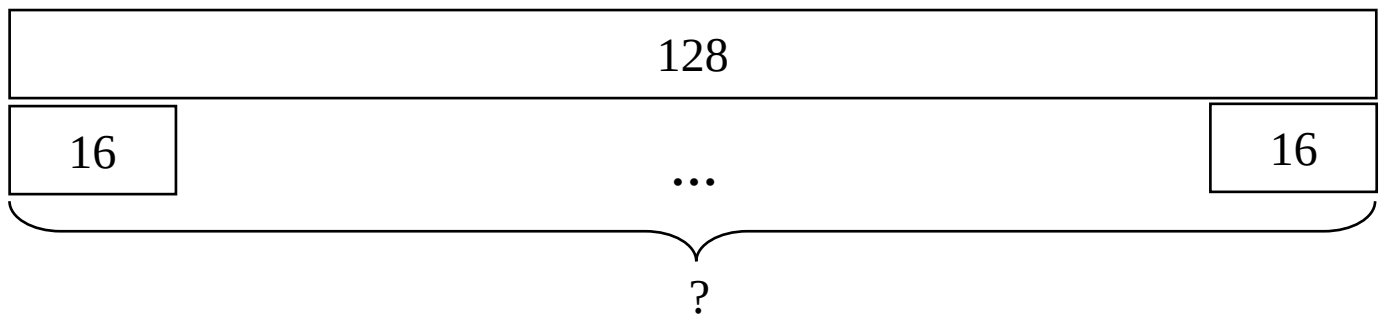
Recherche du nombre total d'éléments.

. Chaque mois, Lucien reçoit 12 euros d'argent de poche. Il veut s'acheter un jeu à 43 euros. Il économise pendant 4 mois. Aura-t-il assez d'argent pour acheter le jeu ?



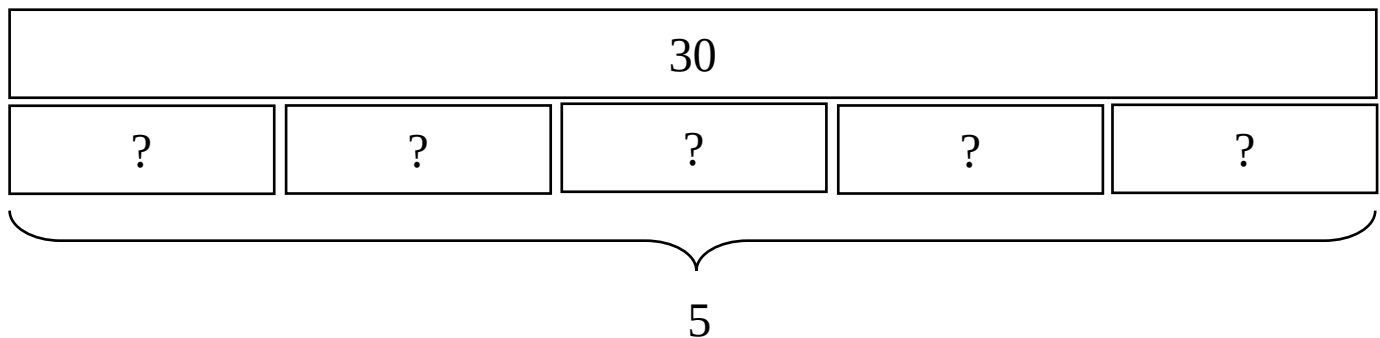
Recherche du nombre de parts.

. Un dîner au restaurant entre amis coûte 128 euros. Chacun a payé 16 euros. Combien d'amis ont participé au repas ?

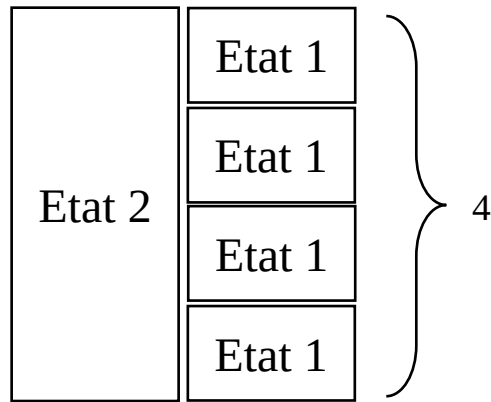


Recherche de la valeur d'une part.

. Franck a 30 bonbons. Il veut les partager équitablement avec ses 5 copains. Combien chacun en aura-t-il ?

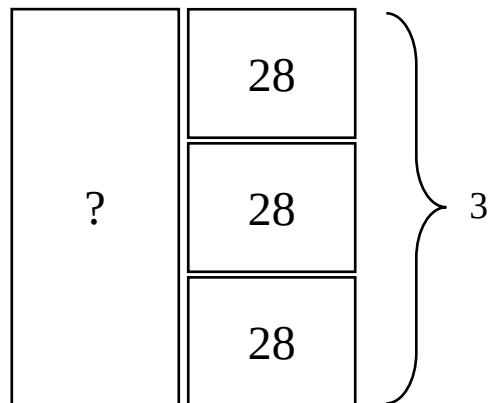


Problèmes de comparaison multiplicative.



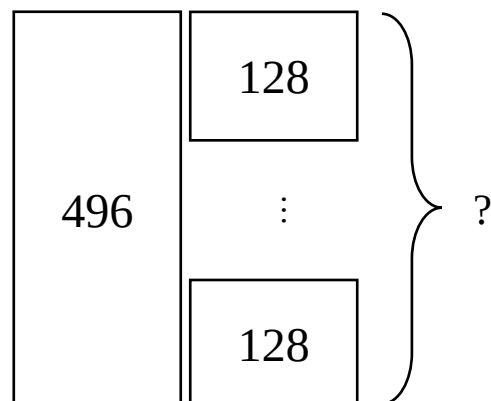
Recherche du résultat.

. J'ai 28 images, Marie en a 3 fois plus que moi. Combien en a-t-elle ?

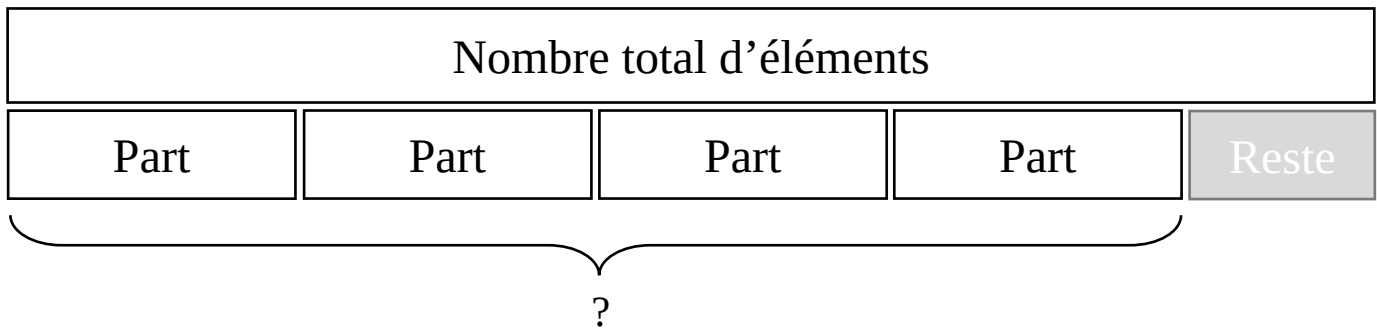


Recherche du rapport (nombre de fois).

. Karine mesure la longueur de deux rubans. Le jaune mesure 128 cm, le vert 496 cm. Combien de fois le vert est-il plus grand que le jaune ?

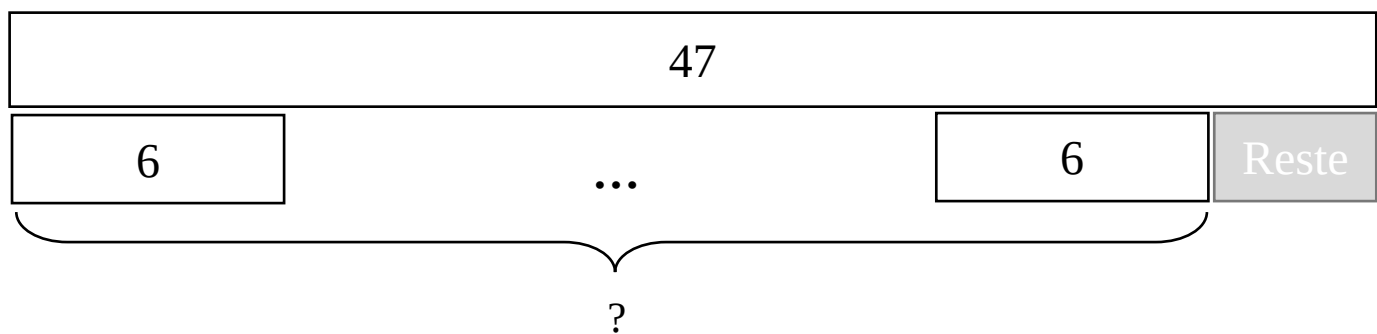


Problèmes de partage avec reste.



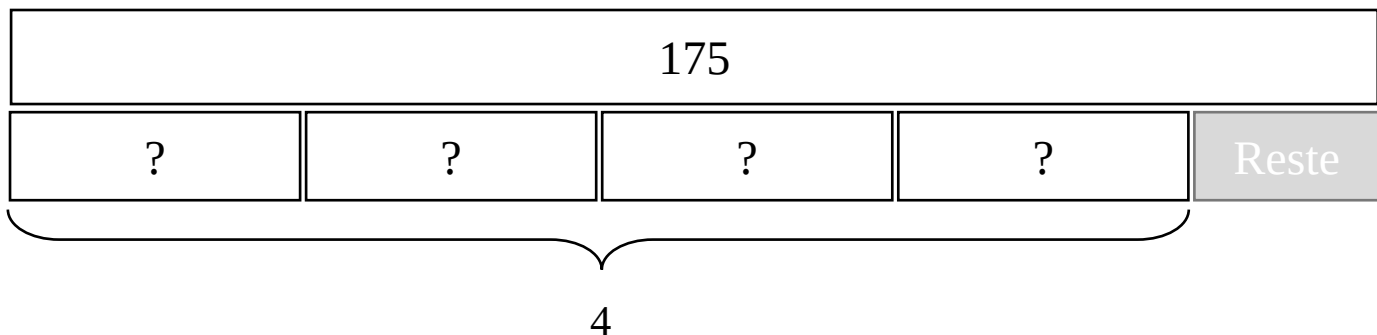
Recherche du nombre de parts (avec reste)

. Le fleuriste dispose de 47 fleurs qu'il répartit en bouquets de 6 fleurs. Combien peut-il constituer de bouquets ?



Recherche de la valeur d'une part

. La maîtresse a acheté 175 crayons pour les 4 classes de l'école. Elle souhaite les distribuer équitablement. Combien de stylos pourra-t-elle donner à chaque classe ?



Problèmes à étapes

La résolution de problèmes à étapes apporte une nouvelle difficulté qui tient essentiellement dans la compréhension de l'histoire, de sa chronologie, de la signification de chaque étape et de l'ordre de résolution de chacune d'entre elles.

Aussi en terme de programmation, ces problèmes apparaissent tout au long des cycles de l'école élémentaire et forment un enseignement spécifique. L'élève doit être capable de reconnaître un problème à étapes lorsqu'il le rencontre.

Ainsi, de façon systématique lors des premières séances puis de façon régulière lors de séances proposant ce type de problèmes, il est à nouveau important de s'appuyer sur un travail collectif à l'oral. Les élèves doivent pouvoir reformuler l'énoncé, débattre et identifier les étapes de résolution.

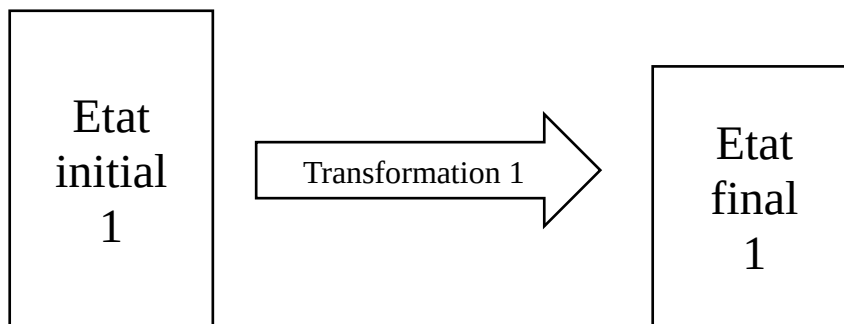
La résolution pourra alors s'appuyer sur deux résolutions possibles. La première consiste à scinder en plusieurs étapes et produire un schéma pour chacune (lorsque c'est nécessaire). Cette procédure est plus éclairante pour les élèves. L'écriture d'une phrase réponse pour chaque étape est un moyen d'explicitation et de compréhension important pour l'élève, comme pour l'enseignant.

Nous vous conseillons de commencer par ce type de procédure avant d'engager la seconde (décrite un peu plus loin dans le document) qui s'appuie sur un schéma combinant plusieurs ou l'ensemble des étapes.

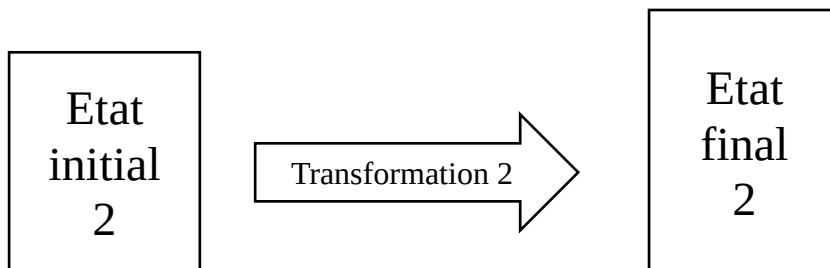
Une des complexités dans ce type de problèmes, ce situe dans l'imbrication des différentes étapes. C'est ce qui rend la représentation mentale difficile et qui nécessite donc un travail d'explicitation et un passage à l'écrit pour clarifier l'enchaînement des étapes. En effet, l'élève ne peut pas trouver les résultats directement car l'inconnue de la première étape constitue un élément nécessaire à la résolution de l'étape suivante. De plus, selon la chronologie de l'histoire et la façon dont elle est racontée, l'ordre de résolution peut être très différent de celui de la narration.

Exemple avec 2 transformations successives (problèmes du bus avec arrêts) :

Etape 1 :



Etape 2 : l'état initial de la deuxième transformation est l'état final de la première transformation

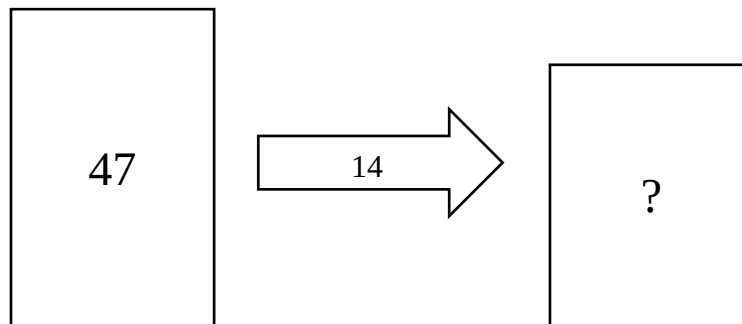


Exemples de problèmes à étapes :

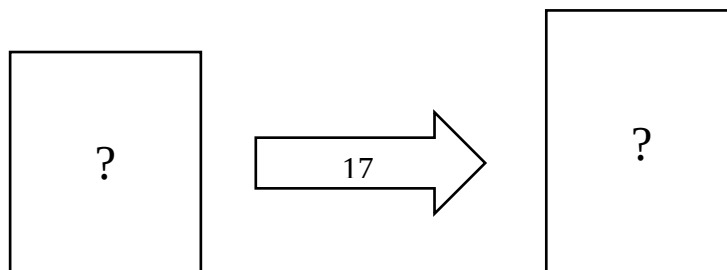
Transformations successives :

. Il y avait 47 enfants dans un bus. Au premier arrêt, 14 enfants sont descendus. Au deuxième arrêt, 17 enfants sont montés. Combien y a-t-il d'enfants dans le bus maintenant ?

Etape 1 :

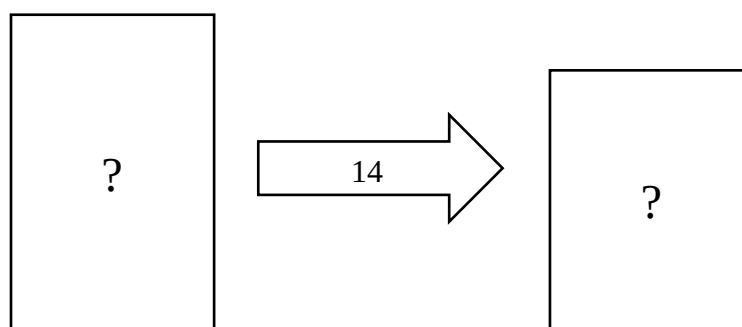


Etape 2 :

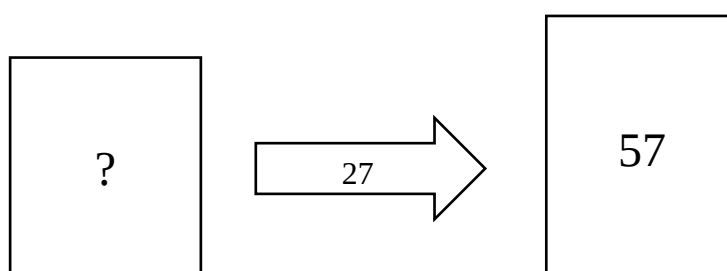


. Il y avait des enfants dans un bus. Au premier arrêt, 14 enfants sont descendus. Au deuxième arrêt, 27 enfants sont montés. Il y a maintenant 57 enfants dans le bus. Combien y a-t-il d'enfants dans le bus avant le premier arrêt ?

Etape 1 :



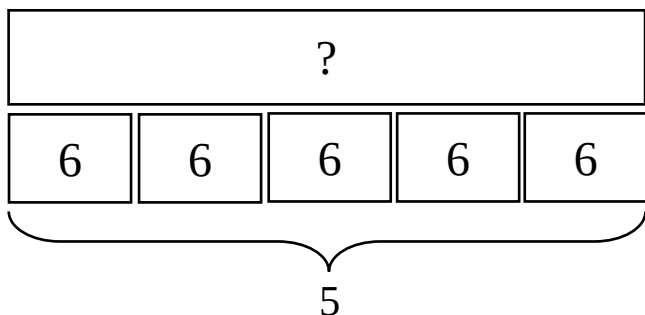
Etape 2 :



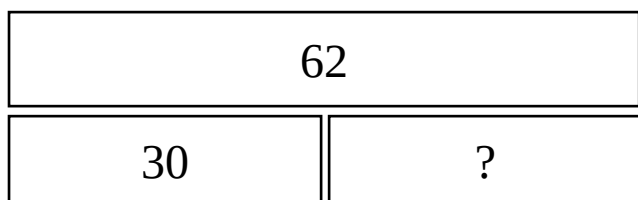
Exemple avec des étapes différentes (commande de matériel) :

. Pour la fête de l'école, le maître s'occupe de préparer le goûter. Il prend 5 packs de 6 bouteilles de soda et 4 packs de jus d'orange. En tout, il achète 62 bouteilles. Combien y-a-il de bouteilles de jus d'orange dans chaque pack ?

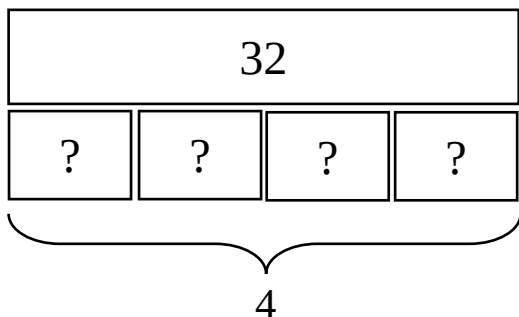
Etape 1 : nombre de bouteilles de soda. Problème multiplicatif.



Etape 2 : nombre de bouteilles de jus d'orange. Problème additif de combinaison.



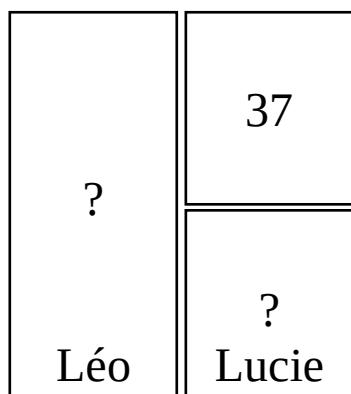
Etape 3 : nombre de bouteilles de jus d'orange dans chaque pack. Problème de partage.



Exemple avec des comparaisons successives :

. Léo a 37 billes de plus que Lucie et Zoé a 19 billes de moins que Lucie. Zoé a 46 billes. Combien de billes a Léo ?

Etape 1 :

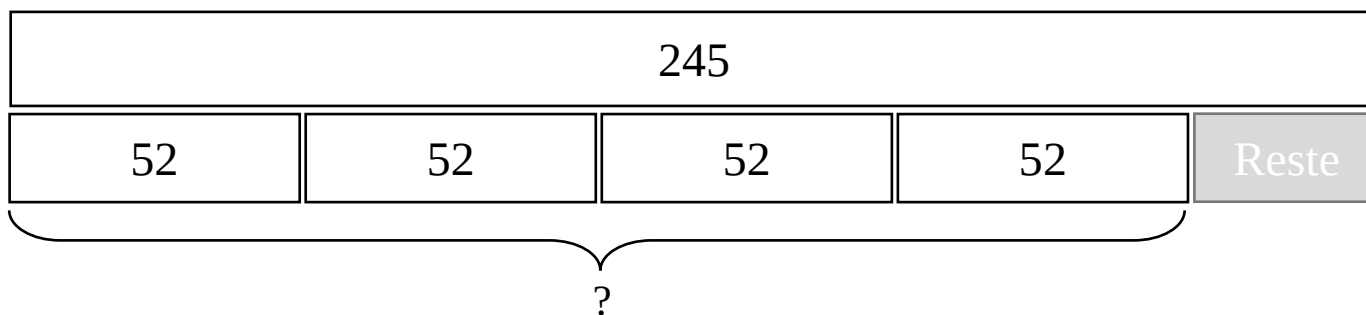


Etape 2 :



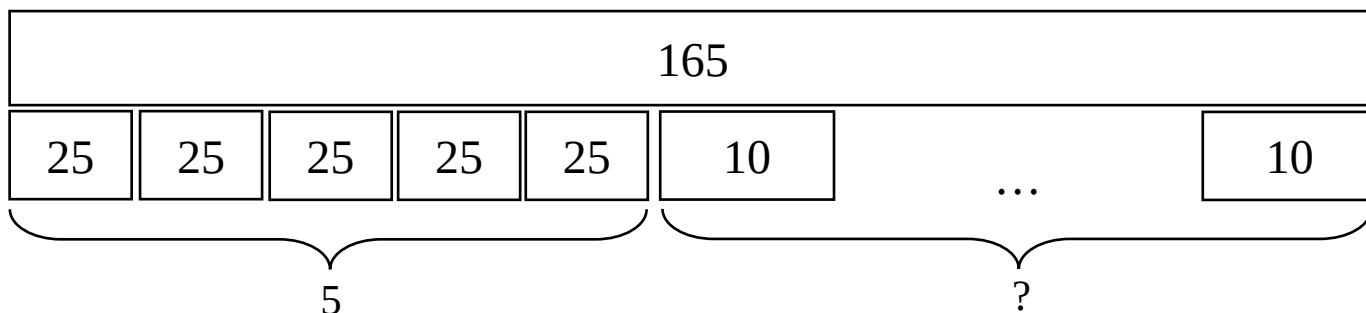
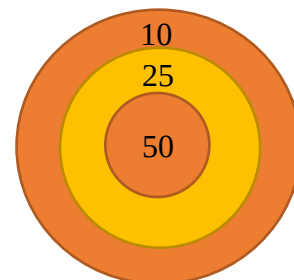
Recherche de la valeur d'une part avec prise en compte du reste

. Les supporters d'un club de rugby sont partis en cars pour assister à la finale du championnat régional. Pour cela, ils ont loué des cars de 52 places chacun. 245 supporters ont participé au voyage. Combien de cars l'amicale des supporters a-t-elle dû réserver ?

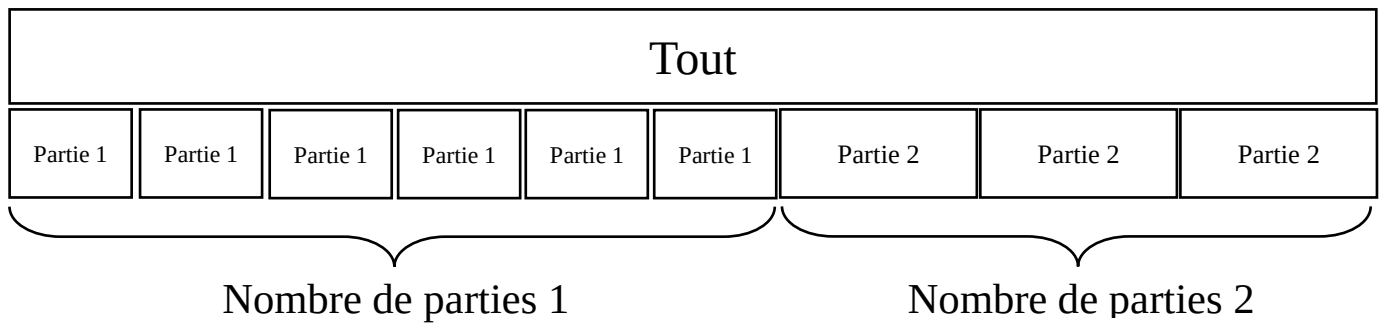


Recherche du nombre de parts dans un problème à étapes

. Jérémie lance des fléchettes dans une cible. Il en lance 5 dans la zone à 25 points. Il en lance d'autres qui arrivent toutes dans la zone à 10 points. Il marque 165 points en tout. Combien a-t-il lancé de fléchettes dans la zone 10 ?

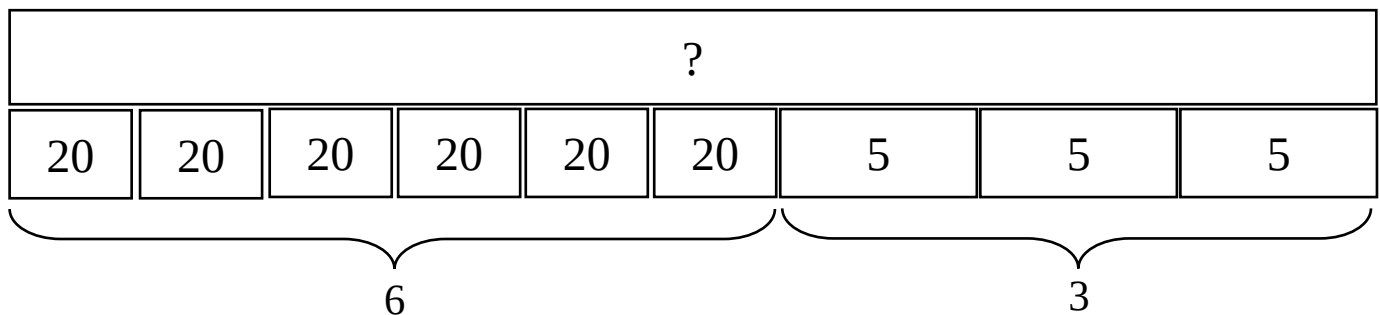


Procédures utilisant un seul schéma :



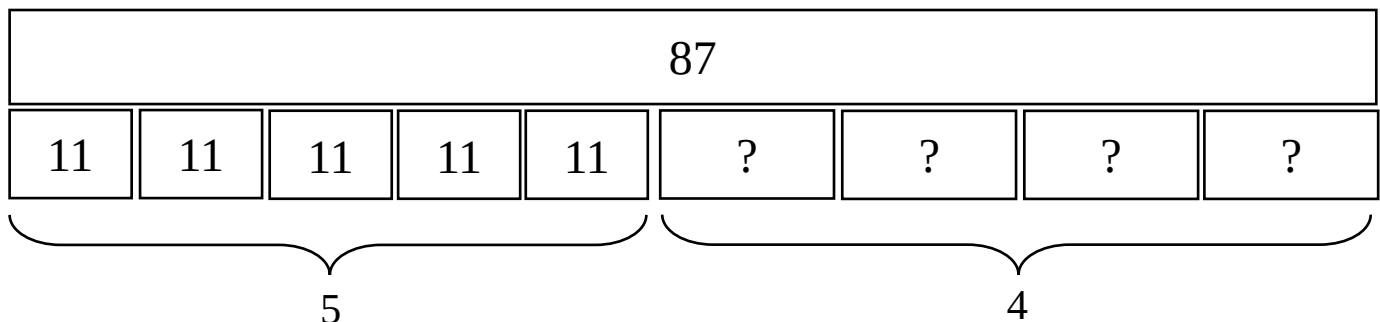
Recherche du tout

. Une maîtresse achète des livres pour la bibliothèque. 6 livres à 20 Euros l'un et 3 magazines à 5 Euros chacun. Combien dépense-t-elle en tout ?



Recherche de la valeur d'une part

. Pour la fête du village, François fabrique du jus de poires et de pommes. Il presse 5 cagettes de 11 kg de poires. Il presse aussi 4 cagettes de pommes. En tout il presse 87 kg de fruits. Combien pèse chaque cagette de pommes ?



Recherche de la valeur d'une part

. Pour organiser un voyage scolaire, la directrice de l'école a réservé des cars pour emmener les 235 élèves et accompagnateurs. Dans le 5^{ème} bus, plus petit que les autres, il y a 27 personnes. Sachant que les 4 autres bus sont identiques et qu'ils sont complets, combien de personnes transportent chacun des 4 autres cars.

